

# Лекция 17

## СХЕМЫ С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

До сих пор мы рассматривали МКЭ в галеркинском варианте, который, в частности, предполагает, что билинейная и линейная формы в исходной задаче и в конечноэлементной совпадают. Однако сохранение этого предположения делает рассмотренные нами МКЭ практически нереализуемыми, ибо для построения матрицы жесткости и вектора нагрузки нужно вычислять некоторые интегралы, которые в элементарных функциях могут не выражаться. Поэтому необходимо использование приближенного вычисления интегралов, а это сразу выводит нас за рамки метода Галеркина. В этом, вообще говоря, ничего страшного нет; просто теперь нужно еще уметь оценивать влияние приближенного интегрирования на точность получаемого приближенного решения. Целью настоящей лекции как раз и является выяснение этого вопроса. В частности, будут указаны условия, при выполнении которых точность конечноэлементного решения с использованием приближенного интегрирования не уменьшается по сравнению с соответствующим галеркинским вариантом.

### 1. Постановка задачи и всякая всячина

Рассмотрим (см. п. 1 лекции 11) задачу отыскания функции

$$u \in H : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \quad (1)$$

Раньше эту задачу мы решали приближенно при помощи МКЭ галеркин-ского типа. Именно, искали

$$u^h \in H^h \subset H : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \quad (2)$$

Теперь вместо приближенного решения  $u^h$  — решения задачи (2) — будем искать "возмущенное" приближенное решение

$$u_*^h \in H^h : \quad a_*(u_*^h, v^h) = l_*(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \quad (3)$$

Будем при этом предполагать, что билинейная форма  $a_*(w^h, v^h)$  равномерно  $H^h$ -эллиптическая, т.е.

$$\exists \theta > 0, \theta \neq \theta(h), \quad \forall v^h \in H^h, \quad \theta \|v^h\|_H^2 \leq a_*(v^h, v^h). \quad (4)$$

Наша задача — оценить влияние возмущений форм  $a(w^h, v^h)$  и  $l(v^h)$ , определяемых  $a_*(w_*^h, v^h)$  и  $l_*(v^h)$ , на приближенное решение  $u^h$ .

При анализе простейших ситуаций полезна

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (4). Тогда для разности решений задач (2) и (3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u^h - u_*^h\|_H^2 &\leq \frac{1}{\theta} [ |a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a(u^h, u^h - u_*^h)| + \\ &\quad + |l_*(u^h - u_*^h) - l(u^h - u_*^h)| ]. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2) и (3), находим, что

$$\begin{aligned} a_*(u^h - u_*^h, u^h - u_*^h) &= a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a_*(u_*^h, u^h - u_*^h) = \\ &= a_*(u^h, u^h - u_*^h) - l_*(u^h - u_*^h) = \\ &= [a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a(u^h, u^h - u_*^h)] - [l_*(u^h - u_*^h) - l(u^h - u_*^h)]. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание условие (4), приходим к (5).  $\square$

Применим доказанную теорему для анализа МКЭ, в котором коэффициенты билинейной и линейной форм заменены их приближениями.

**Пример 1.** Пусть

$$\begin{aligned}
 a(w, v) &= \int_0^1 (p(x)w'v' + q(x)wv) dx = \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} (pw'v' + qwv) dx, \\
 l(v) &= \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} f v dx, \\
 a_*(w, v) &= \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} (p_* w' v' + q_* w v) dx, \quad l_*(v) = \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} f_* v dx
 \end{aligned} \tag{6}$$

и для коэффициентов  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $p_*(x)$ ,  $q_*(x)$  выполнены условия (11.16). Тогда условие (4) тоже выполнено. Используя неравенства Коши - Буняковского и Коши, находим, что

$$\begin{aligned}
 |a_*(w, v) - a(w, v)| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} [(p_*^{(i)} - p)w'v' + (q_*^{(i)} - q)wv] dx \right| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \max_{e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p| + |q_*^{(i)} - q|) \int_{e^{(i)}} (|w'v'| + |wv|) dx \leq \\
 &\leq \max_i \max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)|) \|w\|_1 \|v\|_1.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично

$$|l_*(v) - l(v)| \leq \max_i \max_{x \in e^{(i)}} |f_*^{(i)} - f(x)| \|v\|_1. \tag{8}$$

Подставляя теперь оценки (7) и (8) при  $w = u^h$  и  $v = u^h - u_*^h$  в (5), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|u^h - u_*^h\|_1 &\leq \frac{1}{\theta} \left\{ \max_i \max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)|) \|u^h\|_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \max_i \max_{x \in e^{(i)}} |f_*^{(i)} - f(x)| \right\}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Из рассуждений типа использованных при доказательстве теоремы 14.1 вытекает, что для приближенного решения  $u^h(x)$  справедлива априорная

оценка (14.14), т.е.  $\|u^h\|_1 \leq c \|f\|_0 = \text{const}$ . Подставляя эту оценку в (9), находим, что

$$\|u^h - u_*^h\|_1 \leq c \max_i \max_{x \in e^{(i)}} \left( |p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)| + |f_*^{(i)} - f(x)| \right).$$

Пусть  $p(x), q(x), f(x) \in C^1[0, 1]$  и  $g_*^{(i)}$  — интерполянт нулевой степени на  $e^{(i)}$  функции  $g(x)$ . Тогда

$$\max_{x \in e^{(i)}} \left( |p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)| + |f_*^{(i)} - f(x)| \right) = O(h),$$

где  $h = \max_i h^{(i)}$ , и, следовательно,

$$\|u^h - u_*^h\|_1 = O(h).$$

Если  $u^h \in S_1^h$ , то в силу теоремы 12.3  $\|u - u^h\|_1 = O(h)$ , а поэтому и

$$\|u - u_*^h\|_1 \leq \|u - u^h\|_1 + \|u^h - u_*^h\|_1 = O(h),$$

т.е. указанная аппроксимация коэффициентов  $p, q$  и  $f$  не уменьшает порядка скорости сходимости МКЭ в смысле нормы пространства  $H^1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** При такой аппроксимации коэффициентов скорость сходимости в  $L_2$  и суперсходимость в узлах  $x_i$  для  $u_*^h \in S_1^h$ , вообще говоря, не сохраняется.

Если  $a_*(w, v)$  и  $l_*(v)$  строятся по  $a(w, v)$  и  $l(v)$  при помощи квадратурных формул, то для оценки точности  $u_*^h$  теорема 1 оказывается не столь полезной. Здесь нам потребуется более тонкая

**Теорема 2** (лемма Стренга). *Если выполнено условие (4) и билинейная форма  $a(w, v)$  непрерывна, т.е.*

$$\exists \theta > 0, \quad \forall w, v \in H, \quad |a(w, v)| \leq \frac{1}{\theta} \|w\|_H \|v\|_H, \quad (10)$$

то

$$\|u - u_*^h\|_H \leq c \left\{ \inf_{w^h \in H^h} \left[ \|u - w^h\|_H + \sup_{v^h \in H^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_H} \right] + \sup_{v^h \in H^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_H} \right\}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $w^h$  и  $v^h$  — произвольные элементы из пространства  $H^h$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_*(u_*^h - w^h, v^h) &= a_*(u_*^h, v^h) - a_*(w^h, v^h) = \\ &= l_*(v^h) - a_*(w^h, v^h) - l(v^h) + a(u, v^h) - a(w^h, v^h) + a(w^h, v^h) = \\ &= a(u - w^h, v^h) + [a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)] + [l_*(v^h) - l(v^h)]. \end{aligned}$$

Полагая здесь  $v^h = u_*^h - w^h$  и принимая во внимание (4) и (10), заключаем, что

$$\begin{aligned} \theta \|u_*^h - w^h\|_H &\leq \frac{1}{\theta} \|u - w^h\|_H + \\ &+ \frac{|a(w^h, u_*^h - w^h) - a_*(w^h, u_*^h - w^h)|}{\|u_*^h - w^h\|_H} + \frac{|l_*(u_*^h - w^h) - l(u_*^h - w^h)|}{\|u_*^h - w^h\|_H} \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta} \|u - w^h\|_H + \sup_{v^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_H} + \sup_{v^h} \frac{|l_*(v^h) - l(v^h)|}{\|v^h\|_H}. \end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с неравенством

$$\|u - u_*^h\|_H \leq \|u - w^h\|_H + \|u_*^h - w^h\|_H$$

и беря нижнюю грань по  $w^h \in H^h$ , получим (11).  $\square$

Для оценки влияния квадратурных формул, используемых при вычислении элементов матрицы жесткости и вектора нагрузки, на точность метода конечных элементов нам потребуются некоторые нормы, которые раньше в этом тексте не встречались. Именно, пусть

$$\|v\|_{L_p} := \left( \int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

есть норма банахова пространства  $L_p(0, 1)$  функций, модуль которых суммируем с  $p$ -ой степенью. Эта норма является обобщением на случай  $p \in [1, \infty)$  гильбертовой нормы  $L_2(0, 1)$ . Далее, пусть

$$\|v\|_{L_\infty} := \operatorname{vray} \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \equiv \operatorname{ess} \sup_{x \in [0,1]} |v(x)| := \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L_p}.$$

Банахово пространство  $L_\infty(0, 1)$  состоит из существенно ограниченных функций, т.е. из функций, которые либо сами ограничены, либо становятся таковыми после исправления на множестве меры нуль. Например,

функция, изображенная на рис. 1, имеет  $L_\infty$ -норму равную 1, в то время как ее максимальное значение равно 2.

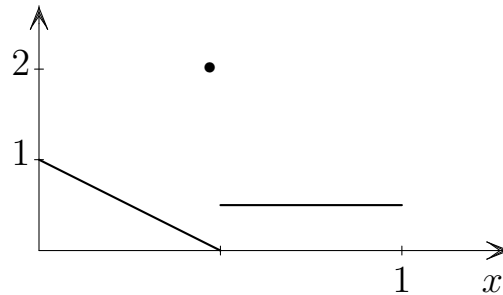


Рис. 1

Отметим, что если  $v(x) \in C[0, 1]$ , то  $\|v\|_C = \|v\|_{L_\infty}$ .

Наконец, пусть

$$\|v\|_{W_p^s} := \left( \sum_{l=0}^s \|v^{(l)}\|_{L_p}^p \right)^{1/p} \sim \sum_{l=0}^s \|v^{(l)}\|_{L_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

есть норма соболевского пространства  $W_p^s(0, 1)$  функций, чьи  $l$ -е обобщенные производные до порядка  $s$  суммируемы с  $p$ -ой степенью. Известно, что при  $p \leq q$  пространство  $W_q^s$  вкладывается в пространство  $W_p^s$ , и имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_p^s} \leq \|v\|_{W_q^s}, \quad p \leq q. \quad (12)$$

Если введенные нормы будут использоваться для измерения функций, заданных на множестве, отличном от единичного отрезка, то это множество будет указано в скобках рядом с идентификатором нормы, например,  $W_p^s(e^i)$ .

Напомним, что оценить сверху некоторую норму функции через ее более слабую норму, вообще говоря, нельзя. Например, справедлива оценка (11.18) из леммы 11.1, а обратное неравенство невозможно. Однако, этот запрет снимается для конечномерных пространств. При этом постоянная в обратном неравенстве становится зависящей от размерности рассматриваемого конечномерного пространства. Частный случай таких оценок содержит

**Лемма 1** (обратное неравенство). Пусть функция  $v^h(x)$  такова, что  $v^h|_{e^{(i)}} \in P_k(e^{(i)})$ . Тогда для любых целых  $l \leq m \leq k$

$$|v^h|_{H^m(e^{(i)})} \leq c \left(h^{(i)}\right)^{l-m} |v^h|_{H^l(e^{(i)})}, \quad (13)$$

где  $c$  — постоянная, не зависящая от  $h^{(i)}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\hat{w}(t) = (\hat{v}(t))^{(l)}$ , где  $\hat{v}(t) \in \hat{P}_k$ . В силу определения полуноормы и конечномерности  $\hat{P}_k$  справедливы неравенства

$$|\hat{w}|_{m-l} \leq \|\hat{w}\|_{m-l} \leq c \|\hat{w}\|_0 = c |\hat{w}|_0.$$

Подставляя сюда представление  $\hat{w}(t)$ , будем иметь

$$|\hat{v}^{(l)}|_{m-l} = |\hat{v}|_m \leq c |\hat{v}^{(l)}|_0 = c |\hat{v}|_l. \quad (14)$$

Постоянная  $c$  здесь и выше зависит только от  $k$ . Сделаем замену переменной

$$t = (x - x_{i-1})/h^{(i)}. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что

$$\hat{v}(t) = \hat{v} \left( \frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}} \right) = v^h(x), \quad x \in e^{(i)},$$

приходим к тождеству

$$|\hat{v}|_j = \left(h^{(i)}\right)^{j-1/2} |v^h|_{H^j(e^{(i)})}, \quad j = 0, \dots, k. \quad (16)$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из неравенства (14).  $\square$

При исследовании метода конечных элементов очень полезна следующая

**Лемма 2** (Брэмбла-Гилберта). Пусть  $f$  — линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве  $W_p^s(0, 1)$  и обращающийся в нуль на полиномах  $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$ . Тогда существует такая положительная постоянная  $c$ , зависящая только от функционала, что

$$|f(v)| \leq c |v|_{W_p^s} \quad \forall v \in W_p^s(0, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, чтобы не загромождать изложение, проведем при дополнительных предположениях, что  $p \geq 2$  и  $f$  непрерывен и на  $H^s$ . В силу этого предположения при любой  $v \in W_p^s(0, 1)$ ,  $p \geq 2$ , справедливо неравенство

$$|f(v)| \leq c \|v\|_s.$$

По предположению леммы для любого  $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$

$$f(v + p) = f(v),$$

что вместе с предыдущим неравенством приводит к оценке

$$|f(v)| \leq c \|v + p\|_s,$$

а если принять во внимание лемму 13.11, то будем иметь

$$|f(v)| \leq c \widetilde{\|v + p\|_s}.$$

Выбирая теперь  $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$  согласно лемме 13.12, найдем, что

$$|f(v)| \leq c \|v\|_s.$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из (12). □

## 2. Использование квадратур

Пусть  $\hat{g}(t)$  — непрерывная функция, заданная на  $[0, 1]$ . Для приближенного вычисления  $\int_0^1 \hat{g}(t) dt$  введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\hat{S}(\hat{g}) := \sum_{l=1}^L \hat{\omega}_l \hat{g}(t_l^*), \quad (17)$$

где  $\hat{\omega}_l$  — веса квадратурной формулы, а  $t_l^*$  — узлы. Пусть эта квадратурная формула точна на полиномах  $m$ -ой степени, т.е.

$$\hat{E}(\hat{p}) := \int_0^1 \hat{p}(t) dt - \hat{S}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_m(0, 1). \quad (18)$$



Квадратурная формула  $\hat{S}(\hat{g})$  индуцирует квадратурные формулы на конечных элементах  $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ . Именно, делая замену переменной (15), получим

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} g(x) dx &= h^{(i)} \int_0^1 g(x_{i-1} + h^{(i)}t) dt = h^{(i)} \int_0^1 \hat{g}^{(i)}(t) dt \sim \\ &\sim h^{(i)} \hat{S}(\hat{g}^{(i)}) = \sum_{l=1}^L \omega_l^{(i)} g(x_{i-1} + h^{(i)}t_l^*) = \sum_{l=1}^L \omega_l^{(i)} g(x_l^{(i)}) = S^{(i)}(g). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\omega_l^{(i)} = h^{(i)} \hat{\omega}_l, \quad x_l^{(i)} = x_{i-1} + h^{(i)}t_l^*. \quad (20)$$

Положим

$$a_*(w, v) := \sum_{i=1}^N S^{(i)}(pw'v' + qwv), \quad l_*(v) := \sum_{i=1}^N S^{(i)}(fv). \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(w, v) - a_*(w, v) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{e^{(i)}} (pw'v' + qwv) dx - S^{(i)}(pw'v' + qwv) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ E^{(i)}(pw'v') + E^{(i)}(qwv) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$E^{(i)}(g) = \int_{e^{(i)}} g(x) dx - S^{(i)}(g), \quad (23)$$

а

$$l(v) - l_*(v) = \sum_{i=1}^N E^{(i)}(fv). \quad (24)$$

Тем самым, чтобы воспользоваться теоремой 2, нужно уметь оценивать  $E^{(i)}$  из (23) от соответствующих аргументов.

**Лемма 3.** Пусть функции  $v^h(x)$  и  $w^h(x)$  таковы, что их сужения на конечный элемент  $e^{(i)}$  суть полиномы степеней  $k_1 = k'_1 + \bar{k}_1$  и  $k_2 = k'_2 + \bar{k}_2$ , соответственно, т.е.

$$v^h(x) \big|_{e^{(i)}} \in P_{k_1}(e^{(i)}), \quad w^h(x) \big|_{e^{(i)}} \in P_{k_2}(e^{(i)}), \quad (25)$$

а  $a(x)$  — достаточно гладкая функция. Тогда, если квадратурная формула  $\hat{S}(\hat{g})$  точна на многочленах степени  $m \geq \bar{k}_1 + \bar{k}_2$ , т.е.

$$\hat{E}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}_m, \quad m \geq \bar{k}_1 + \bar{k}_2, \quad (26)$$

то

$$\left| E^{(i)}(aw^h v^h) \right| \leq c h^{m+1-\bar{k}_1-\bar{k}_2} \|a\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^{k'_2}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^{k'_1}(e^{(i)})}, \quad (27)$$

где  $k'_l$  и  $\bar{k}_l$  — неотрицательные целые числа, а постоянная  $c$  не зависит от  $h$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы Брэмбла-Гилберта

$$|\hat{E}(\hat{g})| \leq \hat{c} |\hat{g}|_{W_\infty^{m+1}}.$$

Пусть

$$\hat{g}(t) = \hat{a}(t)\hat{w}(t)\hat{v}(t), \quad \hat{v}(t) \in \hat{P}_{k_1}, \quad \hat{w}(t) \in \hat{P}_{k_2}. \quad (28)$$

Тогда на основании формулы Лейбница и в силу конечномерности  $\hat{P}_{k_1}$  и  $\hat{P}_{k_2}$

$$\begin{aligned} |\hat{E}(\hat{g})| &\leq \hat{c} |\hat{g}|_{W_\infty^{m+1}} \leq \hat{c} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} |\hat{w}|_{W_\infty^l} |\hat{v}|_{W_\infty^{j-l}} \\ &\leq \hat{c} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} |\hat{w}|_l |\hat{v}|_{j-l}. \end{aligned} \quad (29)$$

Сделаем замену переменной (15). Очевидно, что

$$|\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} = (h^{(i)})^{m+1-j} |a|_{W_\infty^{m+1-j}(e^{(i)})}.$$

Принимая во внимание это соотношение и соотношения (16), из (29) с учетом (28) находим, что

$$\begin{aligned} & |E^{(i)}(aw^h v^h)| = h^{(i)} |\hat{E}(\hat{a}\hat{w}\hat{v})| \leq \\ & \leq c (h^{(i)})^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |a|_{W_\infty^{m+1-j}(e^{(i)})} |w^h|_{H^l(e^{(i)})} |v^h|_{H^{j-l}(e^{(i)})} \leq \\ & \leq c (h^{(i)})^{m+1} \|a\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^{k_2}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^{k_1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Но в силу обратного неравенства (13)

$$\|\cdot\|_{H^{k_j}(e^{(i)})} \leq c (h^{(i)})^{-\bar{k}_j} \|\cdot\|_{H^{k'_j}(e^{(i)})}, \quad j = 1, 2.$$

Комбинируя это неравенство с предыдущей оценкой, получим (27).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Путем усложнения доказательства оценка (27) леммы 3 может быть усилена за счет ослабления требования к гладкости функции  $a(x)$ .

Теорема 2, дающая оценку точности возмущенной задачи, содержит условие (4) — условие  $H^h$ -эллиптичности возмущенной квадратичной формы. Выяснить ограничения, накладываемые на квадратурную формулу для выполнения этого условия, нам поможет

**Лемма 4.** Пусть  $A$  и  $B$  — симметричные неотрицательные матрицы с совпадающими ядрами. Тогда отвечающие им квадратичные формы эквивалентны, т.е. существует постоянная  $\delta > 0$ , что

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \delta \mathbf{x}^T B \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \delta^{-1} \mathbf{x}^T B \mathbf{x}, \quad \delta > 0. \quad (30)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\mathbb{Z} = \ker A = \ker B$ ,  $p = \dim \mathbb{Z} < n$  и  $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Y}$ . Поскольку  $A\mathbf{z} = B\mathbf{z} = 0$  при  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ , а  $A\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \ni B\mathbf{y}$  при  $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ , то для любого  $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{y}^T B \mathbf{y}. \quad (31)$$

Обозначим через  $\lambda_{p+1}$  минимальное отличное от нуля собственное значение матрицы  $A$ , а через  $\lambda_n$  — ее максимальное собственное значение. Для матрицы  $B$  аналогичную роль играют числа  $\mu_{p+1}$  и  $\mu_n$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1} \|\mathbf{y}\|^2 & \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_n \|\mathbf{y}\|^2, \\ \mu_{p+1} \|\mathbf{y}\|^2 & \leq \mathbf{y}^T B \mathbf{y} \leq \mu_n \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\lambda_{p+1}}{\mu_n} \mathbf{y}^T B \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{y} \leq \frac{\lambda_n}{\mu_{p+1}} \mathbf{y}^T B \mathbf{y}.$$

Отсюда и из (31) приходим к (30) с  $\delta = \min\{\lambda_{p+1}/\mu_n, \mu_{p+1}/\lambda_n\}$ .  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $v^h \in S_k^h$ , и для  $\int_0^1 \hat{g}(t) dt$  задана квадратурная формула (17) с положительными весами  $\omega_l > 0$ . Тогда для справедливости неравенства

$$c |v^h|_1^2 \leq \sum_{i=1}^N S^{(i)}(|dv^h/dx|^2) \leq c^{-1} |v^h|_1^2, \quad c \neq c(h), \quad (32)$$

достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

- 1° число узлов квадратурной формулы  $L \geq k$ ,
- 2° квадратурная формула  $\hat{S}$  точна на  $\hat{P}_{2(k-1)}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (19) доказываемая оценка (32) эквивалентна неравенству

$$c |\hat{v}|_1^2 \leq \hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) \leq c^{-1} |\hat{v}|_1^2 \quad \hat{v} \in \hat{P}_k. \quad (33)$$

Поскольку  $(d\hat{v}/dt)^2 \in \hat{P}_{2(k-1)}$ , то при выполнении условия 2°

$$|\hat{v}|_1^2 = \hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2)$$

и неравенства (32) имеют место с  $c = 1$ .

Пусть выполнено условие 1°. Обозначим через  $\Phi = [\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 \dots \hat{\varphi}_{k+1}]$  матрицу функций формы базисного элемента  $\hat{e} = [0, 1]$ , а через

$$\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_1 \hat{v}_2 \dots \hat{v}_{k+1}]^T$$

— его вектор узловых значений. Тогда  $\hat{v}(t) = \hat{\Phi} \hat{\mathbf{v}}$  и

$$|\hat{v}|_1^2 = \int_0^1 |d\hat{\Phi}/dt \hat{\mathbf{v}}|^2 dt = \hat{\mathbf{v}}^T \hat{K} \hat{\mathbf{v}},$$

где

$$\hat{K} = [\hat{k}_{ij}], \quad \hat{k}_{ij} = \int_0^1 d\hat{\varphi}_i/dt d\hat{\varphi}_j/dt dt.$$

Аналогично находим, что

$$\hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) = \hat{v}^T \hat{K}_* \hat{v},$$

где

$$\hat{K}_* = [\hat{k}_{*ij}], \quad \hat{k}_{*ij} = \hat{S}(d\hat{\varphi}_i/dt d\hat{\varphi}_j/dt).$$

Покажем, что ядра этих матриц совпадают. Очевидно, что, если  $|\hat{v}|_1 = 0$ , то  $\hat{v}(t) = \text{const}$ , т.е.

$$\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = \dots = \hat{v}_{k+1}. \quad (34)$$

С другой стороны, в силу положительности весов квадратурной формулы равенство  $\hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) = 0$  возможно лишь тогда, когда неотрицательная функция  $(d\hat{v}/dt)^2$  обращается в нуль во всех узлах квадратурной формулы, т.е.

$$|d\hat{v}/dt| \Big|_{t=t_l^*} = 0, \quad l = 1, \dots, L.$$

Поскольку  $d\hat{v}/dt \in \hat{P}_{k-1}$ , а  $L \geq k$ , то эти соотношения могут иметь место только для тождественно нулевой функции  $d\hat{v}/dt \equiv 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Поэтому  $\hat{v}(t) \equiv \text{const}$  и  $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = \dots = \hat{v}_{k+1}$ , что совпадает с (34).

Итак, ядра  $\hat{K}$  и  $\hat{K}_*$  совпадают. Собственные числа матрицы  $\hat{K}$  зависят только от выбранных функций формы и не зависят от разбиения отрезка  $[0, 1]$  на конечные элементы. Собственные числа матрицы  $\hat{K}_*$  зависят еще от квадратурной формулы  $\hat{S}$ , но также не зависят от элементов  $e^{(i)}$ . Эти рассуждения вместе с леммой 4 приводят к (33), а, следовательно, и к (32).  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $v^h \in \tilde{S}_k^h$  из (12.17), билинейная форма  $a_*(w^h, v^h)$  задается соотношением (21), а квадратурная формула  $\hat{S}$  подчинена условиям леммы 5. Тогда, если для коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$  выполнены условия (11.16), то

$$a_*(v^h, v^h) \geq c \|v^h\|_1^2, \quad c \neq c(h).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку весовые коэффициенты квадратурной формулы предполагаются положительными, то в силу (11.16) из (17) следует, что

$$a_*(v^h, v^h) \geq c_0 \sum_{i=1}^N S^{(i)}(|dv^h/dx|^2),$$

а применение леммы 5 приводит к оценке

$$a_*(v^h, v^h) \geq c_0 c |v^h|_1^2.$$

В силу леммы 11.2 при  $v \in \tilde{H}^1(0, 1)$  справедлива оценка  $|v|_1 \geq \|v\|_0$ . Поскольку  $\tilde{S}_k^h \subset \tilde{H}^1(0, 1)$ , а  $v^h \in \tilde{S}_k^h$ , то окончательно

$$a_*(v^h, v^h) \geq \frac{c_0 c}{2} \|v^h\|_1^2, \quad v^h \in \tilde{S}_k^h.$$

□

**Теорема 3.** Пусть квадратурная формула имеет положительные коэффициенты, является точной на многочленах из  $\hat{P}_m$ ,  $m \geq k-1$ , и число ее узлов  $L \geq k$ . Тогда, если  $u(x)$  — решение задачи (1), (6), (11.15), и выполнены условия (11.16), (11.17), а  $u_*^h$  — решение задачи (3), (21) при  $H^h = \tilde{S}_k^h$ , то

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_1 &\leq \\ &\leq c \left\{ h^k |u|_{k+1} + h^{m-k+2} [(\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}}) \|u\|_{k+1} + \|f\|_{W_\infty^{m+1}}] \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемой ситуации лемма 6 имеет место, и, следовательно, предположения (4) теоремы 2 выполнены. В силу этой теоремы справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_1 &\leq c \left\{ \inf_{w^h \in \tilde{S}_k^h} \left[ \|u - w^h\|_1 + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_1} \right\}. \end{aligned}$$

Положим здесь  $w^h = i_{h,k}u$  и воспользуемся теоремой 12.4, в силу которой

$$\|u - i_{h,k}u\|_1 \leq c h^k |u|_{k+1}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_1 &\leq c \left\{ h^k |u|_{k+1} + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|a(i_{h,k}u, v^h) - a_*(i_{h,k}u, v^h)|}{\|v^h\|_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_1} \right\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Далее, поскольку

$$|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)| = \left| \sum_{i=1}^N \left[ E^{(i)} \left( p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} \right) + E^{(i)}(qw^h v^h) \right] \right|, \quad (36)$$

то следует воспользоваться леммой 3, да не один раз. Заменяем сначала в лемме 3 функцию  $v^h$  на  $dv^h/dx$ , а  $w^h$  на  $dw^h/dx$  и положим  $a(x) = p(x)$ . Это будет означать, что  $k_1 = k_2 = k - 1$ . Положим теперь  $k'_1 = 0$ , а  $k'_2 = k - 1$ , т.е.  $\bar{k}_1 = k - 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0$ . Тогда неравенство (27) леммы 3 примет вид

$$\left| E^{(i)} \left( p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} \right) \right| \leq c h^{m-k+2} \|p\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Если же в лемме 3 функции  $w^h$  и  $v^h$  оставить на месте и положить  $a(x) = q(x)$ , то  $k_1 = k_2 = k$ . Пусть, кроме того,  $k'_1 = 1$ , а  $k'_2 = k$ , т.е.  $\bar{k}_1 = k - 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0$ . В этом случае будем иметь

$$\left| E^{(i)}(qw^h v^h) \right| \leq c h^{m-k+2} \|q\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Отсюда и из предшествующего неравенства находим, что

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)} \left( p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} + qw^h v^h \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{m-k+2} \left( \|p\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \right) \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Эти оценки подставим в (36) и к результату подстановки применим неравенство Коши, в результате чего будем иметь

$$\begin{aligned} |a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)| & \leq \sum_{i=1}^N \left| E^{(i)} \left( p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} + qw^h v^h \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{m-k+2} (\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}}) \sqrt{\sum_{i=1}^N \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})}^2} \|v^h\|_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим  $\|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})}$ . В силу неравенства треугольника и оценок (12.23)

$$\begin{aligned} \|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})} & \leq \|u\|_{H^k(e^{(i)})} + \|u - i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})} \leq \\ & \leq \|u\|_{H^k(e^{(i)})} + c h \|u\|_{H^{k+1}(e^{(i)})} \leq c \|u\|_{H^{k+1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Полагая в (37)  $w^h = i_{h,k}u$  и используя эту оценку, будем иметь

$$\begin{aligned} & | a(i_{h,k}u, v^h) - a_*(i_{h,k}u, v^h) | \leq \\ & \leq ch^{m-k+2} (\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}}) \|u\|_{k+1} \|v^h\|_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Обратимся к последнему слагаемому правой части (35)

$$l(v^h) - l_*(v^h) = \sum_{i=1}^N E^{(i)}(fv^h). \quad (39)$$

Снова воспользуемся леммой 3 теперь при  $a(x) = f(x)$ ,  $w^h = 1$  и  $v^h$ . Тогда  $k_1 = k$ ,  $k_2 = k'_2 = \bar{k}_2 = 0$ . Положим  $k'_1 = 1$ , т.е.  $\bar{k}_1 = k - 1$ . При указанных значениях параметров из (27) следует, что

$$| E^{(i)}(fv^h) | \leq ch^{m-k+2} \|f\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Отсюда и из (39) с использованием неравенства Коши получаем оценку

$$| l(v^h) - l_*(v^h) | \leq ch^{m-k+2} \|f\|_{W_\infty^{m+1}} \|v^h\|_1.$$

Комбинируя (38) и это неравенство с (36), получим утверждение теоремы.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Из теорем 3 и 12.5 следует, что порядок точности в норме пространства  $H^1$  приближенного решения  $u_*^h$  не уменьшается по сравнению с  $u^h$ , если используемые квадратурные формулы будут точны на многочленах степени  $m \geq 2(k-1)$ . Отметим, что при таких  $m$  главный член билинейной формы

$$\int_0^1 p(x) \frac{du^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} dx$$

будет вычисляться точно, если  $u^h, v^h \in S_k^h$ , а  $p \equiv \text{const}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Требования к гладкости коэффициентов  $p(x)$ ,  $q(x)$  и правой части  $f(x)$  могут быть снижены, если принять во внимание замечание 2.



### 3. Оценки в слабых нормах

В четырнадцатой лекции было показано (теоремы 14.3 и 14.4), что в слабых нормах  $(\|\cdot\|_{-s})$  точность приближенного решения  $u^h \in S_k^h$  повышается до  $O(h^{k+s+1})$ ,  $s \leq k-1$ . Интересно выяснить, сохраняются ли эти оценки для  $u_*^h$ , и, если сохраняются, при каких ограничениях на квадратурную формулу  $\hat{S}$ . Чтобы выяснить это, нам потребуется утверждение, в некотором смысле аналогичное теореме 2.

Пусть  $w$  — решение следующей задачи:

$$w \in H : \quad a(v, w) = l_\varphi(v) \quad \forall v \in H. \quad (40)$$

Обозначим через  $W'$  пространство, сопряженное к  $W \subset L_2(0, 1)$ .

**Теорема 4.** *Если  $u$ ,  $u_*^h$  и  $w$  — решения задач (1), (3) и (40), соответственно, то*

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{W'} = \sup_{\varphi \in W} \frac{1}{\|\varphi\|_W} \inf_{v^h \in H^h} \{ & a(u - u_*^h, w - v^h) - \\ & - [a(u_*^h, v^h) - a_*(u_*^h, v^h)] + [l(v^h) - l_*(v^h)] \}. \end{aligned} \quad (41)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из (40)

$$\begin{aligned} l_\varphi(u - u_*^h) &= a(u - u_*^h, w) = a(u - u_*^h, w - v^h) + a(u - u_*^h, v^h) = \\ &= a(u - u_*^h, w - v^h) + a(u, v^h) - a(u_*^h, v^h) + a_*(u_*^h, v^h) - l_*(v^h) = \\ &= a(u - u_*^h, w - v^h) + [a_*(u_*^h, v^h) - a(u_*^h, v^h)] + [l(v^h) - l_*(v^h)]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|u - u_*^h\|_{W'} = \sup_{\varphi \in W} \frac{(\varphi, u - u_*^h)}{\|\varphi\|_W} = \sup_{\varphi \in W} \frac{l_\varphi(u - u_*^h)}{\|\varphi\|_W},$$

то, подставляя сюда найденное представление  $l_\varphi(u - u_*^h)$  и принимая во внимание, что  $v^h \in H^h$  — любая, получим (41).  $\square$

**Теорема 5.** *Если квадратурная формула (17) точна на  $\hat{P}_{2(k-1)}$ , и выполнены условия теоремы 3, то*

$$\|u - u_*^h\|_{-s} = O(h^{s+k+1}), \quad s = 0, 1, \dots, k-2. \quad (42)$$

Если, к тому же,  $\hat{E}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}_{2k-1}$ , то дополнительно

$$\|u - u_*^h\|_{-k+1} = O(h^{2k}), \quad (s = k - 1). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи введем обозначения

$$a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h) = (a - a_*)(w^h, v^h), \quad l(v^h) - l_*(v^h) = (l - l_*)(w^h, v^h).$$

Пусть в (40)  $a(w, v)$  и  $l(v)$  задаются соотношениями (6), а  $H = H_0^1$ . Тогда из (41) следует, что

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} \leq c \sup_{\varphi \in H_0^s} \frac{1}{\|\varphi\|_s} \inf_{v^h \in S_{k,0}^h} [\|u - u_*^h\|_1 \|w - v^h\|_1 + \\ + | (a - a_*)(u_*^h, v^h) | + | (l - l_*)(v^h) |]. \end{aligned}$$

Полагая здесь  $v^h = i_{h,s+1}w$  с  $s+1 \leq k$  и применяя теорему 3 о сходимости при  $m = 2(k-1)$  и теорему 12.4 об оценке интерполяции, будем иметь

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} \leq c \sup_{\varphi \in H_0^s} \frac{1}{\|\varphi\|_s} [h^k (\|u\|_{k+1} + \|f\|_{W_\infty^{2k-1}}) h^{s+1} \|w\|_{s+2} + \\ + | (a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w) | + | (l - l_*)(i_{h,s+1}w) |]. \end{aligned}$$

В силу теоремы 14.2 справедливы априорные оценки

$$\|w\|_{s+2} \leq c \|\varphi\|_s \quad \text{и} \quad \|u\|_{k+1} \leq c \|f\|_{k-1} \quad (44)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} \leq c [h^{s+k+1} \|f\|_{W_\infty^{2k-1}} + \\ + \frac{|(a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w)|}{\|\varphi\|_s} + \frac{|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)|}{\|\varphi\|_s} ]. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь оценим влияние квадратур. Начнем с младшего члена. В силу леммы 3 при  $m = k + s \leq 2(k-1)$ ,  $k_1 = k'_1 = s + 1$ ,  $k_2 = k'_2 = 0$ ,  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$  и  $w^h \equiv 1$  с  $\|w^h\|_{L_2(e^{(i)})} = \sqrt{h^{(i)}}$  имеем

$$\left| E^{(i)}(f i_{h,s+1}w) \right| \leq c h^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})} \sqrt{h^{(i)}} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}. \quad (46)$$

Поэтому с учетом неравенства Коши находим, что

$$\begin{aligned} |(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| &= \left| \sum_{i=1}^N E^{(i)}(fi_{h,s+1}w) \right| \leq \\ &\leq ch^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \sum_{i=1}^N (h^{(i)})^{1/2} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq \\ &\leq ch^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \left( \sum_{i=1}^N (\|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}^2) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для оценки норм, стоящих под знаком суммы, воспользуемся неравенством треугольника и оценкой (12.23) при  $k = l = s + 1$

$$\begin{aligned} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} &\leq \|i_{h,s+1}w - w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} + \|w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq \\ &\leq ch\|w\|_{H^{s+2}(e^{(i)})} + \|w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq c\|w\|_{H^{s+2}(e^{(i)})}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляя эту оценку в правую часть предыдущего неравенства, найдем, что

$$|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| \leq ch^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \|w\|_{s+2},$$

а принимая во внимание первую из оценок (42), будем иметь

$$|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| \leq ch^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \|\varphi\|_s. \quad (48)$$

Требуемая оценка последнего слагаемого правой части (45) найдена.

Обратимся к оценке второго слагаемого правой части (45). Здесь рассуждения нужно несколько видоизменить по сравнению с рассуждениями, использованными только что. Если этого не сделать, то мы зайдем в тупик: появляющаяся в процессе оценок величина  $\|u_*^h\|_{H^k(e^{(i)})}$  при  $k > 1$  через известные величины разумным способом оценена быть не может. Поэтому функцию  $u_*^h$ , фигурирующую в (45), нужно заменить на  $i_{h,k}u$ , т.е. сначала воспользоваться оценкой

$$\begin{aligned} |(a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w)| &\leq |(a - a_*)(i_{h,k}u, i_{h,s+1}w)| + \\ &+ |(a - a_*)(u_*^h - i_{h,k}u, i_{h,s+1}w)|. \end{aligned} \quad (49)$$

При оценке правой части (49) теперь уже снова можно пользоваться леммой 3, ибо  $\|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})}$  оценивать мы умеем (см. (45)), а  $(u_*^h - i_{h,k}u)$  достаточно оценить в  $H^1(e^{(i)})$ , так как мала сама эта функция.

Итак, в силу леммы 3 при  $k_1 = k'_1 = k$ ,  $k_2 = k'_2 = s + 1$ ,  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$   
и

$$m = k + s \leq 2(k - 1), \quad (50)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)}(q i_{h,k} u i_{h,s+1} w) \right| \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} \|q\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})} \|i_{h,k} u\|_{H^k(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}, \end{aligned}$$

а при  $k_1 = k'_1 = k - 1$ ,  $k_2 = k'_2 = s$ ,  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$  и том же  $m = k + s$

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)}\left(p \frac{d i_{h,k} u}{dx} \frac{d i_{h,s+1} w}{dx}\right) \right| \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} \|p\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})} \|i_{h,k} u\|_{H^k(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Отсюда, как и из (46) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| (a - a_*)(i_{h,k} u, i_{h,s+1} w) \right| \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s+1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s+1}}) \|f\|_{k-1} \|\varphi\|_s. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее, снова в силу леммы 3 при  $m = k + s - 1$ ,  $k_1 = k$ ,  $k'_1 = 1$ ,  
 $k_2 = k'_2 = s + 1$ ,  $\bar{k}_1 = k - 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0$

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)}(q(u_*^h - i_{h,k} u) i_{h,s+1} w) \right| \leq \\ & \leq c h^{s+1} \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}(e^{(i)})} \|u_*^h - i_{h,k} u\|_{H^1(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}, \end{aligned}$$

а при  $m = k + s - 1$ ,  $k_1 = k - 1$ ,  $k'_1 = 0$ ,  $k_2 = k'_2 = s$ ,  $\bar{k}_1 = k - 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0$

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)}\left(p \frac{d}{dx} (u_*^h - i_{h,k} u) \frac{d}{dx} i_{h,s+1} w\right) \right| \leq \\ & \leq c h^{s+1} \|p\|_{W_\infty^{k+s-1}(e^{(i)})} \|u_*^h - i_{h,k} u\|_{H^1(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| (a - a_*)(u_*^h - i_{h,k} u, i_{h,s+1} w) \right| \leq \\ & \leq c h^{s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s-1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}}) \|u_*^h - i_{h,k} u\|_1 \|\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Используя теперь неравенство треугольника, теорему 3 о сходимости и теорему 12.4 об оценке интерполяции, найдем, что

$$\|u_*^h - i_{h,k} u\|_1 \leq \|u_*^h - u\|_1 + \|u - i_{h,k} u\|_1 \leq c h^k \|u\|_{k+1}.$$

Комбинируя эту оценку с предыдущим неравенством, будем иметь

$$\begin{aligned} & | (a - a_*)(u_*^h - i_{h,k}u, i_{h,s+1}w) | \leq \\ & \leq ch^{k+s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s-1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}}) \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Мы получили все предварительные оценки. Подставляя эту оценку и оценку (51) в (49), а результат подстановки и оценку (48) в (45), с учетом (50) получим (42). Утверждение (43) вытекает из предшествующего утверждения, если положить  $s = k - 1$  и, тем самым, потребовать, чтобы используемые квадратурные формулы были точны на многочленах степени  $2k - 1$ .  $\square$

#### 4. Примеры квадратурных формул и квадратурных схем

Из теоремы 3, замечания 3 и теоремы 4 следует, что для сохранения всех свойств сходимости квадратурные схемы МКЭ должны использовать квадратуры, точные на многочленах степени  $m = 2k - 1$ , где  $k$  — степень многочленов конечноэлементного пространства. Таким свойством обладают квадратурные формулы Гаусса, имеющие  $k$  узлов. Приведем несколько квадратурных формул Гаусса для отрезка  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} k = 1 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \hat{g}(1/2); \\ k = 2 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \frac{1}{2} \left[ \hat{g} \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) + \hat{g} \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \right]; \\ k = 3 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \frac{5}{18} \hat{g} \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{9} \hat{g} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{18} \hat{g} \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Помимо формул Гаусса заслуживают внимание формула трапеций, точная на линейных функциях

$$\hat{S}(\hat{g}) = \frac{1}{2} [\hat{g}(0) + \hat{g}(1)]. \quad (53)$$

Воспользуемся квадратурными формулами (52), (53) для построения вектора нагрузки и матриц жесткости и массы линейного элемента. Линейные конечные элементы используются при отыскании приближенного

из  $S_1^h$  решения уравнения (1.1). Матрица функций формы в этом случае задается соотношением (4.8), а сами функции формы — соотношением (4.6). В (4.6) предполагается, что все элементы имеют одинаковую длину, равную  $h$ . Если длины конечных элементов различны и суть  $h^{(i)}$ , то делители  $h$  в формуле (4.6) нужно заменить на  $h^{(i)}$ . Вектор нагрузки определяется соотношением (6.25), а матрицы жесткости и массы — соотношениями (6.16) и (6.20), соответственно. Согласно замечанию 3 и теореме 4 в рассматриваемом случае  $u^h \in S_1^h$ , при построении квадратурных схем МКЭ достаточно использовать первую из формул (52) или формулу (53), которые точны на линейных функциях. Использование второй и третьей формул (52) приводит к более высокой точности при вычислении интегралов, но это никак не сказывается на точности приближенного решения  $u_*^h \in S_1^h$ , ибо сам факт принадлежности приближенного решения  $S_1^h$  ограничивает его точность по отношению к точному решению  $u(x)$ , например, в норме  $L_2$  величиной  $O(h^2)$ .

Будем снабжать обозначения вектора нагрузки и матриц жесткости и массы, вычисленных при помощи формул (52) дополнительным значком звездочка, а величины, вычисленные при помощи (53) — две звездочки. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_*^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} f_{i-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & K_*^{(i)} &= \frac{p_{i-1/2}}{h^{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_*^{(i)} &= \frac{h^{(i)} q_{i-1/2}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{**}^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{bmatrix}, & K_{**}^{(i)} &= \frac{p_{i-1} + p_i}{2h^{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{**}^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} \begin{bmatrix} q_{i-1} & 0 \\ 0 & q_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Соответствующие разностные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
& p_{i-1/2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} - p_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \left( h^{(i)} q_{i-1/2} \frac{u_{i-1}^h + u_i^h}{2} + h^{(i+1)} q_{i+1/2} \frac{u_i^h + u_{i+1}^h}{2} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left( h^{(i)} f_{i-1/2} + h^{(i+1)} f_{i+1/2} \right), \\
& \frac{p_{i-1} + p_i}{2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} - \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} + \frac{h^{(i)} + h^{(i+1)}}{2} q_i u_i^h = \\
& = \frac{h^{(i)} + h^{(i+1)}}{2} f_i.
\end{aligned}$$

Если матрицу жесткости элемента взять из (54), а матрицу массы и вектор нагрузки из (55), то получим широко известную разностную схему

$$-\frac{2}{h^{(i)} + h^{(i+1)}} \left[ p_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} - p_{i-1/2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} \right] + q_i u_i^h = f_i.$$

С точки зрения теории разностных схем все эти схемы имеют второй порядок точности в смысле сеточной нормы  $L_\infty^h$  ( $\|v\|_{L_\infty^h} := \max_i |v_i|$ ) (ср. с теоремой 15.1).

## 5. Замечания о квадратурных схемах в 2D

Ясно, что поводов для использования квадратур при построении схем МКЭ в двумерном случае еще больше, чем в одномерном. Теоретическая основа их использования лежит в утверждениях, аналогичных леммам 3 и 5. Мы не будем их доказывать и даже не будем формулировать в общем виде. Отметим лишь, что при использовании треугольных конечных элементов  $k$ -ой степени условие  $H$ -эллиптичности (4) (или аналог леммы 5), обеспечивающее разрешимость сеточной задачи, будет выполнено, если квадратурная формула имеет положительные коэффициенты и точна на всех многочленах до  $2(k-1)$  степени (как и в одномерном случае). Что касается скорости сходимости такой квадратурной схемы МКЭ, то ее точность в  $H^1$  не ухудшается по сравнению с галеркинской схемой, если

используемые квадратурные формулы, как и в одномерном случае, точны на многочленах степени  $2k - 2$ . Для того, чтобы сохранить скорость сходимости и в  $H^{-k+1}$ , точность квадратурных формул нужно повысить на единицу до  $2k - 1$ .

Приведем несколько квадратурных формул на треугольнике  $e$ , которые можно использовать при построении схем МКЭ.

1°. Одноточечная квадратурная формула с узлом в центре тяжести треугольника. Барицентрические координаты центра тяжести суть

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1/3,$$

а весовой коэффициент

$$\omega = \text{mes } e.$$

Эта формула точна на многочленах первой степени и может быть использована вместе с конечноэлементным пространством  $S_1^h$  из восьмой лекции.

2°. Трехточечная квадратурная формула с узлами в вершинах треугольника, координаты которых определяются соотношениями

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = 1, \quad \zeta_3 = 1,$$

и одинаковыми весовыми коэффициентами

$$\omega = \text{mes } e/3.$$

Эта формула также точна на  $P_1(e)$ .

3°. Семиточечная квадратурная формула, шесть узлов которой совпадают с узлами квадратичного элемента из лекции 10, а седьмой расположен в центре тяжести. Вершинам, серединам сторон и центру тяжести, соответственно, отвечают весовые коэффициенты

$$\omega = \text{mes } e/20, \quad \omega = 2 \text{ mes } e/5, \quad \omega = 9 \text{ mes } e/20.$$

Эта формула точна на многочленах третьей степени и может быть использована вместе с конечноэлементным пространством  $S_2^h$ .

Существуют и более простые в некотором смысле формулы, точные на  $P_3(e)$ . Известна четырехточечная формула, обладающая этим свойством,



но один из ее весовых коэффициентов отрицателен, и поэтому ее использование при построении схем МКЭ нежелательно. У аналогичной шеститочечной формулы узлы расположены не так удобно, как у семиточечной (три в серединах сторон и три внутри).

Другие квадратурные формулы, точные на многочленах более высокой степени, можно найти, например, в [3], [12].

Скажем несколько слов о квадратурных формулах для прямоугольных элементов. Обратим внимание только на две формулы: одноточечную формулу с узлом в центре прямоугольника, которую можно трактовать как произведение одномерных формул прямоугольников, и четырехточечную формулу с узлами в вершинах, трактуемую как произведение формул трапеций. Обе эти формулы точны на билинейных функциях, а, следовательно, и на линейных. Применим их для вычисления отвечающей оператору Лапласа матрицы жесткости (10.9) билинейного элемента. Поскольку в (10.9) под интегралом стоят квадратичные функции, то найденные с использованием этих квадратурных формул матрицы жесткости будут отличаться от точной матрицы (10.10), равно как и получаемые разностные аппроксимации оператора Лапласа будут отличаться от (10.11). Аппроксимационные же свойства метода нарушаться не должны.

Вычисления показывают, что при использовании одноточечной квадратурной формулы для приближенного вычисления (10.9) вместо (10.10) мы получим

$$K_*^{(i,j)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

а при использовании четырехточечной формулы —

$$K_{**}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Легко видеть, что эти матрицы совсем не похожи ни между собой, ни на точную матрицу (10.10), в то время как порождаемые ими разностные

аппроксимации оператора Лапласа близки к (10.11). В самом деле, для одноточечной формулы это

$$\left( u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} + \frac{h^2}{2} u_{\bar{x}x\bar{y}y} \right)_{ij}, \quad (58)$$

а для четырехточечной —

$$(u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y})_{ij}. \quad (59)$$

С точки зрения теории разностных схем все эти аппроксимации, включая (10.11), имеют погрешность  $O(h^2)$ , а (59) даже совпадает с аппроксимацией из (9.8), порожденной матрицей жесткости (9.1) треугольного линейного элемента. В теории разностных схем аппроксимация (58) считается плохой. Плохой она является и с нашей точки зрения, ибо порождающая ее матрица (56) имеет ранг, равный единице, в то время как ранг точной матрицы жесткости (10.10), равно как и матрицы (57), равен трем. Поэтому ядра матриц (10.10) и (56) различны, и ни о какой оценке типа (32) речи быть не может. Одноточечная квадратурная формула обеспечивает достаточную аппроксимацию, но одного узла недостаточно для равномерной  $H$ -эллиптичности получаемой квадратичной формы.

## 6. Упражнения

1. Построить матрицы жесткости, массы и векторы нагрузки из (54) и (55).
2. Убедиться, что рассмотренные квадратурные формулы на треугольнике в самом деле обладают указанной точностью.
3. Построить матрицы жесткости (56) и (57).